Exercice 1

Soit la fonction définie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ou $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels par :

1- $\forall n$; si $n\in\mathbb{N}$ alors $A(0,n)=n+1$.

2- $\forall m$; si $m\in\mathbb{N}^*$ alors $A(m,0)=A(m-1,1)$.

3- $\forall (n,m)$; si $(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ alors $A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1))$.

On définit la suite (F_m) d'éléments de F($\mathbb{N}$,$\mathbb{N}$) (ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) par :

$\forall m$; si $m\in\mathbb{N}$ alors $\forall n$; si $n\in\mathbb{N}$ alors $F_m(n)=A(m,n)$.

1-1 Démontrer que :

$\forall m$; si $m\in\mathbb{N}^*$ alors $F_m(0)=F_{m-1}(1)$.

$\forall (n,m)$; si $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ alors $F_m(n)=F_{m-1}^{n+1}(1)$

1-2 Donner un programme récursif du calcul de la fonction A

soit en TURBO PASCAL

MAPLE

CAML.

1-3 Donner un programme itératif pour le calcul de F_m pour $m=0..4$.

1-4 Démontrer par récurrence :

(a) $F_1(n)=n+2$

(b) $F_2(n)=2n+3$

(c) $F_3(n)=2^{n+3}-3$

(d) Donner $F_4(0)$ et la partie entière de $\ln(F_4(1))$.

1-5 On définit a, α applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par :

$a(n)=A(n,n)$

$\alpha(n)=\inf_{n\le a(p)}(p\in\mathbb{N})$

Calculer $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, $a(3)$.

Calculer $\alpha(2)$, $\alpha(4)$, $\alpha(8)$, $\alpha(10^{5000000000})$.

Ces fonctions interviennent dans le calcul de la complexité d'algorithme de compression d'arbres.

Exercice 2

Le but est d'amorcer le dénombrement d'arbres correspondant aux expressions bien parenthésées.

Soit $\Omega = \{p_1,...,p_k\}$ et $X = \{x_1,...,x_l\}$ deux ensembles finis disjoints.

L'ensemble Ω est nommé ensemble des opérateurs et X est nommé ensemble des variables.

On considère $B(\Omega, X)$ l'ensemble des arbres binaires répondant à la définition récursive :

- chaque variable est un arbre (ou encore un sommet externe) ;
- si t_1 et t_2 sont des arbres et si w est un opérateur, alors le triplet $t = [w, t_1, t_2]$ est un arbre, w est un sommet interne, t_1 est le sous arbre gauche et t_2 est le sous arbre droit de l'arbre t ;
- on appelle taille d'un arbre le nombre de sommets internes.

On note la programmation suivante en MAPLE :

```
evalu := proc (l) local n ;
n := nops(l) ;
if n = 1 then op(l)
   elif l[1] = '+' then convert([evalu(l[2]),evalu(l[3])],l[1])
   elif l[1] = '*' then convert([evalu(l[2]),evalu(l[3])],l[1])
   elif l[1] = '/ ' then convert([evalu(l[2]),1/evalu(l[3])],'*')
   elif l[1] = '-' then convert([evalu(l[2]),-evalu(l[3])],'+') fi :
end:
```

Sachant que :

`convert([x,y], '+') = x + y` et `convert([x,y],'*') = x * y`

`op([x]) = x` et `nops(['+',x,y])=3`

2-1 Si $\Omega = \{+,-,*,/\}$ et $X = \{x,y,z,t,u,v\}$, appliquer le programme à :

`[*,[+,x,y],[/ ,[-,z,t ],[-,u,v]] ]`

2-2 Si $\Omega = \{\%\}$ et $X = \{x\}$, on note pour n entier non nul :

$B_n(\Omega, X)$ comme étant l'ensemble des arbres de taille n et b_n son cardinal.

On note $b_0 = 1$.

Démontrer que pour n, entier non nul, on a : $b_n = \sum_{i=0..n-1} b_i . b_{n-1-i}$.

2-3 (a) Soit x fixé, réel positif strictement et (eq) $x.Z^2 + 1 = Z$. Pour quelles valeurs de x (eq) possède des solutions ; on note S cet ensemble.

(b) On note $b(x)$ la solution admettant un prolongement par continuité en zéro. En admettant que f est de classe infinie sur $S \cup \{0\}$, donner le développement limité en zéro à l'ordre n en zéro.

(c) En déduire que $b_n = (2n)!/(n!)^2/(n+1)$.

FIN DE L'ÉNONCÉ